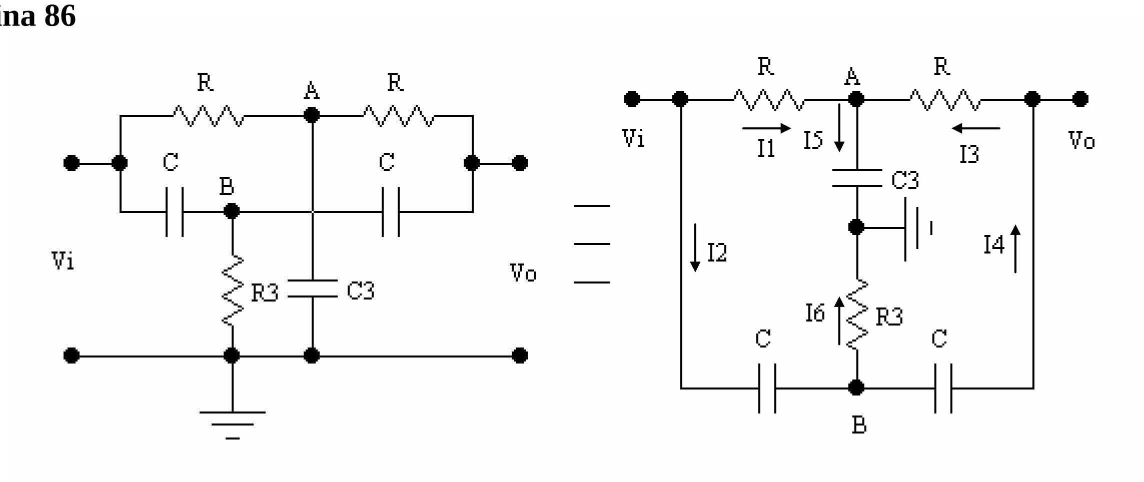
APPENDICE FILTRI ATTIVI - TEORIA

Calcolo della funzione di trasferimento della rete a doppio T del filtro elimina banda di pagina 86



Indicando con V_A e V_B le tensioni dei nodi **A** e **B** rispetto al terminale comune di massa, per il principio di Kirchhoff relativo alle correnti confluenti nei nodi A, B e nodo sull'uscita, supponendo che l'uscita non eroghi corrente (l'uscita verrà collegata all'ingresso di un inseguitore realizzato con amplificatore operazionale che presenta una resistenza d'ingresso praticamente infinita), si può scrivere:

nodo A $\quad I_1 + I_3 = I_5 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{V_i - V_A}{R} + \dfrac{V_o - V_A}{R} = sC_3 V_A \qquad (1)$

uscita $\quad I_3 = I_4 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{V_o - V_A}{R} = sC(V_B - V_o) \qquad (2)$

nodo B $\quad I_2 = I_4 + I_6 \quad \Rightarrow \quad sC \cdot (V_i - V_B) = sC \cdot (V_B - V_o) + \dfrac{V_B}{R_3} \qquad (3)$

Dalla (1) si ricava V_A: $\quad \dfrac{V_i}{R} - \dfrac{V_A}{R} + \dfrac{V_o}{R} - \dfrac{V_A}{R} = sC_3 V_A \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{R} V_A + sC_3 V_A = \frac{V_i}{R} + \frac{V_o}{R} \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{\dfrac{V_i}{R} + \dfrac{V_o}{R}}{\dfrac{2}{R} + sC_3} = \frac{V_i + V_o}{2 + sC_3 R}$$

Dalla (3) si ricava V_B: $\quad sCV_i - sCV_B = sCV_B - sCV_o + \dfrac{V_B}{R_3} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 2sCV_B + \frac{V_B}{R_3} = sCV_i + sCV_o \quad \Rightarrow \quad V_B = \frac{sCV_i + sCV_o}{2sC + \dfrac{1}{R_3}} = \frac{sCR_3 V_i + sCR_3 V_o}{1 + 2sCR_3}$$

Si sostituiscono V_A e V_B nella (2) e si ricava la funzione di trasferimento G(s):

$$\frac{V_o}{R}-\frac{V_A}{R}=sCV_B-sCV_o \quad \Rightarrow \quad V_o-V_A=sCRV_B-sCRV_o \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_o(1+sCR)-V_A=sCRV_B \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_o(1+sCR)-\frac{V_i+V_o}{2+sC_3R}=sCR\,\frac{sCR_3V_i+sCR_3V_o}{1+2sCR_3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_o(1+sCR)-\frac{V_i}{2+sC_3R}-\frac{V_o}{2+sC_3R}=\frac{s^2C^2RR_3V_i}{1+2sCR_3}+\frac{s^2C^2RR_3V_o}{1+2sCR_3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_o(1+sCR)(2+sC_3R)(1+2sCR_3)-V_i(1+2sCR_3)-V_o(1+2sCR_3)=$$

$$=s^2C^2RR_3V_i(2+sC_3R)+s^2C^2RR_3V_o(2+sC_3R) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_o(1+2sCR_3)[(1+sCR)(2+sC_3R)-1]-V_o\left(2s^2C^2RR_3+s^3C^2C_3R^2R_3\right)=$$

$$=V_i\left(2s^2C^2RR_3+s^3C^2C_3R^2R_3\right)+V_i(1+2sCR_3) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_o(1+2sCR_3)\left[2+sC_3R+2sCR+s^2CC_3R^2-1\right]-V_o\left(2s^2C^2RR_3+s^3C^2C_3R^2R_3\right)=$$

$$=V_i\left(s^3C^2C_3R^2R_3+2s^2C^2RR_3+2sCR_3+1\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_o(1+sC_3R+2sCR+s^2CC_3R^2+2sCR_3+2s^2CC_3RR_3+4s^2C^2RR_3+2s^3C^2C_3R^2R_3-$$

$$-2s^2C^2RR_3-s^3C^2C_3R^2R_3)=V_i\left(s^3C^2C_3R^2R_3+2s^2C^2RR_3+2sCR_3+1\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_o\left[s^3C^2C_3R^2R_3+s^2\left(CC_3R^2+2CC_3RR_3+2C^2RR_3\right)+s\left(C_3R+2CR+2CR_3\right)+1\right]=$$

$$=V_i\left(s^3C^2C_3R^2R_3+2s^2C^2RR_3+2sCR_3+1\right)$$

Si divide ambo i membri per $C^2C_3R^2R_3$:

$$V_o\left[s^3+s^2\left(\frac{1}{CR_3}+\frac{2}{CR}+\frac{2}{C_3R}\right)+s\left(\frac{1}{C^2RR_3}+\frac{2}{CC_3RR_3}+\frac{2}{CC_3R^2}\right)+\frac{1}{C^2C_3R^2R_3}\right]=$$

$$=V_i\left(s^3+s^2\,\frac{2}{C_3R}+2s\,\frac{2}{CC_3R^2}+\frac{1}{C^2C_3R^2R_3}\right)$$

Dividendo il primo membro per V_i e il secondo membro per il coefficiente di V_o, si ottiene la funzione di trasferimento.

$$G(s)=\frac{V_o}{V_i}=\frac{s^3+s^2\frac{2}{C_3R}+s\frac{2}{CC_3R^2}+\frac{1}{C^2C_3R^2R_3}}{s^3+s^2\left[\frac{2}{C_3R}+\frac{2}{CR}+\frac{1}{CR_3}\right]+s\left[\frac{2}{CC_3R^2}+\frac{2}{CC_3RR_3}+\frac{1}{C^2C_3RR_3}\right]+\frac{1}{C^2C_3R^2R_3}}$$

Tale funzione presenta 3 poli e 3 zeri. Dovendo risultare un filtro elimina banda del 2° ordine, uno zero e un polo reale negativo devono cancellarsi. Nell'ipotesi che un polo e uno zero coincidano, la funzione di trasferimento può essere scritta in forma normalizzata:

$$G(s)=\frac{(s+\omega_1)(s^2+\omega_o^2)}{(s+\omega_1)\left[s^2+\frac{\omega_o}{Q_o}s+\omega_o^2\right]}=\frac{s^3+\omega_1 s^2+\omega_o^2 s+\omega_1\omega_o^2}{s^3+\left[\omega_1+\frac{\omega_o}{Q_o}\right]s^2+\left[\omega_o^2+\frac{\omega_1\omega_o}{Q_o}\right]s+\omega_1\omega_o^2}$$

Il numeratore di questa equazione coincide con quello dell'equazione precedente se risulta

$$\omega_1=\frac{2}{C_3R}\quad ;\quad \omega_o^2=\frac{2}{CC_3R^2}$$

$$\omega_1\omega_o^2=\frac{2}{C_3R}\cdot\frac{2}{CC_3R^2}=\frac{4}{CC_3^2R^3}=\frac{1}{C^2C_3R^2R_3}$$

Ciò è vero se $\qquad \dfrac{4}{C_3R}=\dfrac{1}{CR_3}\quad\Rightarrow\quad R_3=\dfrac{R}{2}\quad \text{e}\quad C_3=2C$

In tali condizioni, si ha: $\quad \omega_1=\dfrac{2}{C_3R}=\dfrac{2}{2CR}=\dfrac{1}{CR}\quad ;\quad \omega_o^2=\dfrac{2}{CC_3R^2}=\dfrac{2}{2CCR^2}=\dfrac{1}{C^2R^2}$

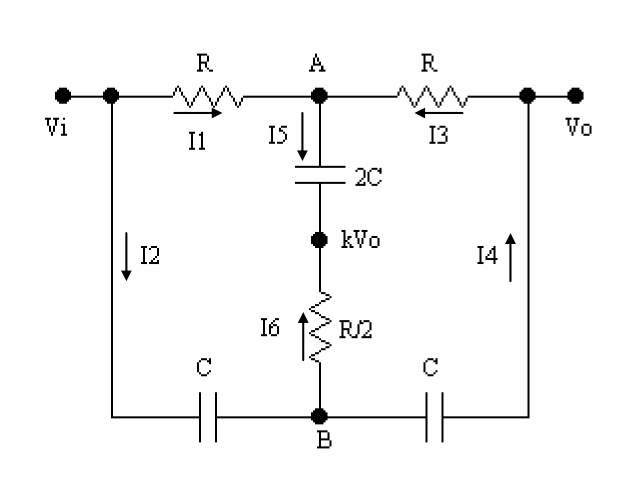
$$\omega_1+\frac{\omega_o}{Q_o}=\frac{2}{RC_3}+\frac{2}{RC}+\frac{1}{R_3C}=\frac{5}{RC}=\frac{1}{RC}+\frac{\omega_o}{Q_o}\quad\Rightarrow\quad\frac{\omega_o}{Q_o}=\frac{4}{RC}$$

Da tutto ciò si ottiene la seguente funzione di trasferimento

$$G(s)=\frac{s^2+\frac{1}{R^2C^2}}{s^2+\frac{4}{RC}s+\frac{1}{R^2C^2}}=\frac{s^2+\omega_o^2}{s^2+\frac{\omega_o}{Q_o}s+\omega_o^2}$$

Essa presenta due poli reali $p=\left(-2\pm\sqrt{3}\right)\cdot\omega_o$ e due zeri puramente immaginari $z=\pm j\omega_o$, con $Q_o=\dfrac{1}{4}=0{,}25$.

Calcolo della funzione di trasferimento della rete a doppio T del filtro elimina banda con Q_o regolabile di pagina 89



Indicando con V_A e V_B le tensioni dei nodi **A** e **B** rispetto al terminale di massa, per il principio di Kirchhoff relativo alle correnti confluenti nei nodi A, B e nodo di retroazione, supponendo che l'uscita non eroghi corrente (l'uscita verrà collegata all'ingresso di un inseguitore realizzato con amplificatore operazionale che presenta una resistenza d'ingresso praticamente infinita), si può scrivere:

nodo A $\qquad I_1 + I_3 = I_5 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{V_i - V_A}{R} + \dfrac{V_o - V_A}{R} = 2sC(V_A - kV_o) \qquad (4)$

nodo retroazione $\qquad I_3 = I_4 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{V_o - V_A}{R} = sC(V_B - V_o) \qquad (3)$

nodo B $\qquad I_2 = I_4 + I_6 \quad \Rightarrow \quad sC(V_i - V_B) = sC(V_B - V_o) + \dfrac{2}{R}(V_B - kV_o) \qquad (4)$

Dalla (4) si ricava V_A: $\qquad V_i - V_A + V_o - V_A = 2sCRV_A + 2sCRkV_o \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 2V_A + 2sCRV_A = V_i + V_o + 2sCRkV_o \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{V_i + V_o(1 + 2sCRk)}{2(1 + sCR)}$$

Dalla (6) si ricava V_B: $\qquad sCRV_i - sCRV_B = sCRV_B - sCRV_o + 2V_B - 2kV_o \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 2V_B + 2sCRV_B = sCRV_i + V_o(2k + sCR) \quad \Rightarrow \quad V_B = \frac{sCRV_i + V_o(2k + sCR)}{2(1 + sCR)}$$

Si sostituiscono V_A e V_B nella (5) e si ricava la funzione di trasferimento G(s):

$$V_o - V_A = sCRV_B - sCRV_o \quad \Rightarrow \quad V_o(1 + sCR) - V_A = sCRV_B \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_o(1 + sCR) - \frac{V_i + V_o(1 + 2sCRk)}{2(1 + sCR)} = sCR\,\frac{sCRV_i + V_o(2k + sCR)}{2(1 + sCR)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_o 2(1+sCR)^2 - V_i - V_o(1+2sCRk) = s^2C^2R^2V_i + V_o(s^2C^2R^2+1) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_o[2+4sCR+2s^2C^2R^2-1-2sCRk] - V_o(2sCRk+s^2C^2R^2) = V_i(s^2C^2R^2+1) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_o[2s^2C^2R^2+4sCR-2sCRk+1-2sCRk-s^2C^2R^2] = V_i(s^2C^2R^2+1) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_o[s^2C^2R^2+4sCR-4sCRk+1] = V_i(s^2C^2R^2+1) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_o[s^2C^2R^2+s4CR(1-k)+1] = V_i(s^2C^2R^2+1)$$

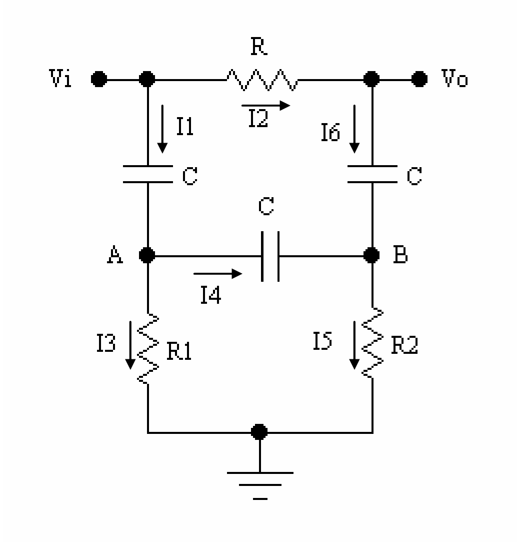
Si divide ambo i membri per C^2R^2: $V_o\left[s^2+s\frac{4(1-k)}{CR}+\frac{1}{C^2R^2}\right] = V_i\left(s^2+\frac{1}{C^2R^2}\right) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{s^2+\frac{1}{C^2R^2}}{s^2+\frac{4(1-K)}{CR}\cdot s+\frac{1}{C^2R^2}} = \frac{s^2+\omega_o^2}{s^2+\frac{\omega_o}{Q_o}s+\omega_o^2}$$

Dal confronto con l'espressione generale della funzione di trasferimento si ha:

$$\omega_o^2 = \frac{1}{C^2R^2} \quad ; \quad \omega_o = \frac{1}{CR} \quad ; \quad Q_o = \frac{CR}{4(1-K)}\omega_o = \frac{CR}{4(1-K)}\cdot\frac{1}{RC} = \frac{1}{4(1-K)}$$

Calcolo della funzione di trasferimento della rete a differenziatore a ponte del filtro elimina banda di pagina 90



Indicando con V_A e V_B le tensioni dei nodi **A** e **B** rispetto al terminale comune di massa, per il principio di Kirchhoff relativo alle correnti confluenti nei nodi A, B e nodo sull'uscita, supponendo che l'uscita non eroghi corrente (l'uscita verrà collegata all'ingresso di un inseguitore realizzato con amplificatore operazionale che presenta una resistenza d'ingresso praticamente infinita), si può scrivere:

nodo A $\quad I_1 + I_3 = I_4 \quad \Rightarrow \quad sC(V_i - V_A) = \dfrac{V_A}{R_1} + sC(V_A - V_B) \qquad (1)$

uscita $\quad I_2 = I_6 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{V_i - V_o}{R} = sC(V_o - V_B) \qquad (2)$

nodo B $\quad I_4 + I_6 = I_5 \quad \Rightarrow \quad sC(V_o - V_B) + sC(V_A - V_B) = \dfrac{V_B}{R_2} \qquad (3)$

Dalla (2) si ricava V_B: $\quad sCV_B = sCV_o - \dfrac{V_i - V_o}{R} \quad \Rightarrow \quad V_B = V_o - \dfrac{V_i - V_o}{sCR}$

Si sostituisce nella (1) e si ricava V_A: $\quad sCV_i - sCV_A = \dfrac{V_A}{R_1} + sCV_A - sCV_B \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 2sCV_A + \frac{V_A}{R_1} = sCV_i + sCV_B \quad \Rightarrow \quad V_A\left(2sC + \frac{1}{R_1}\right) = sCV_i + sCV_o - \frac{V_i - V_o}{R} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_A = \frac{sCV_i + sCV_o - \dfrac{V_i - V_o}{R}}{2sC + \dfrac{1}{R_1}}$$

Si sostituiscono le espressioni ricavate di V_B e V_A nella (3) e si ricava la funzione di trasferimento G(s).

$$sCV_o - sCV_B + sCV_A - sCV_B - \frac{V_B}{R_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad sCV_o - 2sCV_B - \frac{V_B}{R_2} + sCV_A = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad sCV_o - 2sCV_o + \frac{2V_i}{R} - \frac{2V_o}{R} - \frac{V_o}{R_2} + \frac{V_i}{sCRR_2} - \frac{V_o}{sCRR_2} + \frac{s^2C^2V_i + s^2C^2V_o - \frac{sC}{R}V_i + V_o\frac{sC}{R}}{2sC + \frac{1}{R_1}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -sCV_o + \frac{2V_i}{R} - \frac{2V_o}{R} - \frac{V_o}{R_2} + \frac{V_i}{sCRR_2} - \frac{V_o}{sCRR_2} + \frac{s^2C^2V_i + s^2C^2V_o - \frac{sC}{R}V_i + V_o\frac{sC}{R}}{2sC + \frac{1}{R_1}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -2s^2C^2V_o - \frac{sC}{R_1}V_o + \frac{4sC}{R}V_i + \frac{2}{RR_1}V_i - \frac{4sC}{R}V_o - \frac{2}{RR_1}V_o - \frac{2sC}{R_2}V_o - \frac{1}{R_1R_2}V_o + \frac{2}{RR_2}V_i + \frac{1}{sCRR_1R_2}V_i - \frac{2}{R_1R_2}V_o - \frac{1}{sCRR_1R_2}V_o + s^2C^2V_i + s^2C^2V_o - \frac{sC}{R}V_i + \frac{sC}{R}V_o = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad s^2C^2V_o + \frac{sC}{R_1}V_o + \frac{2sC}{R_2}V_o + \frac{3sC}{R}V_o + \frac{3}{R_1R_2}V_o + \frac{2}{RR_1}V_o + \frac{1}{sCRR_1R_2}V_o = s^2C^2V_i + \frac{3sC}{R}V_i + \frac{2}{RR_1}V_i + \frac{2}{RR_2}V_i + \frac{1}{sCRR_1R_2}V_i \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_o\left(s^2C^2 + \frac{sC}{R_1} + \frac{2sC}{R_2} + \frac{3sC}{R} + \frac{3}{R_1R_2} + \frac{2}{RR_1} + \frac{1}{sCRR_1R_2}\right) = V_i\left(s^2C^2 + \frac{3sC}{R} + \frac{2}{RR_1} + \frac{2}{RR_2} + \frac{1}{sCRR_1R_2}\right)$$

Si moltiplicano ambo i membri per $\frac{S}{C^2}$:

$$\Rightarrow \quad V_o\left[s^3 + s^2\left(\frac{1}{CR_1} + \frac{2}{CR_2} + \frac{3}{CR}\right) + s\left(\frac{3}{C^2R_1R_2} + \frac{2}{C^2RR_1}\right) + \frac{1}{C^3RR_1R_2}\right] = V_i\left[s^3 + s^2\frac{3}{CR} + s\left(\frac{2}{C^2RR_1} + \frac{2}{C^2RR_2}\right) + \frac{1}{C^3RR_1R_2}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{s^3 + s^2\frac{3}{CR} + s\left(\frac{2}{C^2RR_1} + \frac{2}{C^2RR_2}\right) + \frac{1}{C^3RR_1R_2}}{s^3 + s^2\left(\frac{1}{CR_1} + \frac{2}{CR_2} + \frac{3}{CR}\right) + s\left(\frac{3}{C^2R_1R_2} + \frac{2}{C^2RR_1}\right) + \frac{1}{C^3RR_1R_2}}$$

Tale funzione presenta 3 poli e 3 zeri. Dovendo risultare un filtro elimina banda del 2° ordine, uno zero e un polo reale negativo devono cancellarsi. Nell'ipotesi che un polo e uno zero coincidano, la funzione di trasferimento può essere scritta in forma normalizzata:

$$G(s) = \frac{(s+\omega_1)(s^2+\omega_o^2)}{(s+\omega_1)\left[s^2+\frac{\omega_o}{Q_o}s+\omega_o^2\right]} = \frac{s^3+\omega_1 s^2+\omega_o^2 s+\omega_1\omega_o^2}{s^3+\left[\omega_1+\frac{\omega_o}{Q_o}\right]s^2+\left[\omega_o^2+\frac{\omega_1\omega_o}{Q_o}\right]s+\omega_1\omega_o^2}$$

Il numeratore di questa equazione coincide con quello dell'equazione precedente se risulta

$$\omega_1 = \frac{3}{CR} \qquad ; \qquad \omega_o^2 = \frac{2}{C^2RR_1}+\frac{2}{C^2RR_2}$$

$$\omega_1\omega_o^2 = \frac{3}{CR}\cdot\left(\frac{2}{C^2RR_1}+\frac{2}{C^2RR_2}\right) = \frac{1}{C^3RR_1R_2} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{6}{C^3R^2R_1}+\frac{6}{C^3R^2R_2} = \frac{6(R_1+R_2)}{C^3R^2R_1R_2} = \frac{1}{C^3RR_1R_2}$$

Tale uguaglianza è vera se risulta $\quad R = 6(R_1+R_2)$.

In tale ipotesi, si ha: $\quad \omega_o^2 = \frac{2(R_1+R_2)}{C^2RR_1R_2} = \frac{2(R_1+R_2)}{C^2\cdot 6(R_1+R_2)R_1R_2} = \frac{1}{3C^2R_1R_2} \;\Rightarrow\; \omega_o = \frac{1}{C\sqrt{3R_1R_2}}$

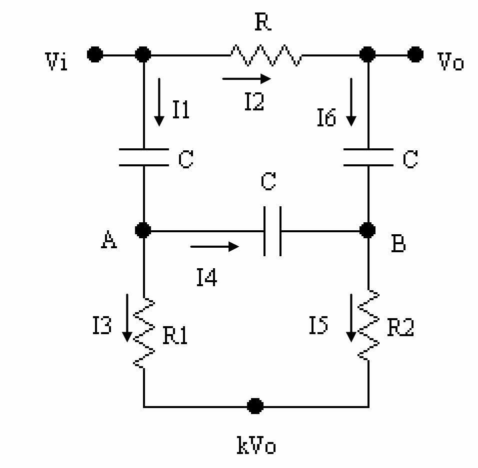
$$\frac{\omega_o}{Q_o} = \frac{1}{CR_1}+\frac{2}{CR_2} = \frac{2R_1+R_2}{CR_1R_2} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad Q_o = \frac{CR_1R_2}{2R_1+R_2}\cdot\omega_o = \frac{CR_1R_2}{2R_1+R_2}\cdot\frac{1}{C\sqrt{3R_1R_2}} = \frac{1}{2R_1+R_2}\cdot\sqrt{\frac{(R_1R_2)^2}{3R_1R_2}} = \frac{\sqrt{3R_1R_2}}{3(2R_1+R_2)}$$

Da tutto ciò si ottiene la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^2+\frac{1}{3C^2R_1R_2}}{s^2+\frac{2R_1+R_2}{CR_1R_2}s+\frac{1}{3C^2R_1R_2}} = \frac{s^2+\omega_o^2}{s^2+\frac{\omega_o}{Q_o}s+\omega_o^2}.$$

Calcolo della funzione di trasferimento della rete a differenziatore a ponte del filtro elimina banda con Q_o regolabile di pagina 91



Indicando con V_A e V_B le tensioni dei nodi **A** e **B** rispetto al terminale comune di massa, per il principio di Kirchhoff relativo alle correnti confluenti nei nodi A, B e nodo sull'uscita, supponendo che l'uscita non eroghi corrente (l'uscita verrà collegata all'ingresso di un inseguitore realizzato con amplificatore operazionale che presenta una resistenza d'ingresso praticamente infinita), si può scrivere:

$$\text{nodo A} \qquad I_1 + I_3 = I_4 \quad \Rightarrow \quad sC(V_i - V_A) = \frac{V_A - kV_o}{R_1} + sC(V_A - V_B) \qquad (1)$$

$$\text{uscita} \qquad I_2 = I_6 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_i - V_o}{R} = sC(V_o - V_B) \qquad (2)$$

$$\text{nodo B} \qquad I_4 + I_6 = I_5 \quad \Rightarrow \quad sC(V_o - V_B) + sC(V_A - V_B) = \frac{V_B - kV_o}{R_2} \qquad (3)$$

Dalla (2) si ricava V_B: $\quad sCV_B = sCV_o - \frac{V_i - V_o}{R} \quad \Rightarrow \quad V_B = V_o - \frac{V_i - V_o}{sCR}$

Si sostituisce nella (1) e si ricava V_A: $\quad sCV_i - sCV_A = \frac{V_A}{R_1} - \frac{kV_o}{R_1} + sCV_A - sCV_B \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 2sCV_A + \frac{V_A}{R_1} = sCV_i + \frac{kV_o}{R_1} + sCV_o - \frac{V_i}{R} + \frac{V_o}{R} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_A = \frac{sCV_i + \frac{kV_o}{R_1} + sCV_o - \frac{V_i}{R} + \frac{V_o}{R}}{2sC + \frac{1}{R_1}}$$

Si sostituiscono le espressioni ricavate di V_B e V_A nella (3) e si ricava la funzione di trasferimento G(s).

$$sCV_o - sCV_B + sCV_A - sCV_B = \frac{V_B}{R_2} - \frac{kV_o}{R_2} \quad \Rightarrow \quad sCV_o - 2sCV_B = \frac{V_B}{R_2} - \frac{kV_o}{R_2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad sCV_o - 2sCV_o + \frac{2}{R}V_i - \frac{2}{R}V_o + + \frac{s^2C^2V_i + s^2C^2V_o - \frac{sC}{R}V_i + \frac{sC}{R}V_o + \frac{sCk}{R_1}V_o}{2sC + \frac{1}{R_1}} = \quad \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{R_2}V_o - \frac{1}{sCRR_2}V_i + \frac{1}{sCRR_2}V_o - \frac{k}{R_2}V_o$$

$$\Rightarrow \quad \left(2sC + \frac{1}{R_1}\right)\left(-sCV_o + \frac{2}{R}V_i - \frac{2}{R}V_o\right) + s^2C^2V_i - \frac{sC}{R}V_i + s^2C^2V_o + \frac{sC}{R}V_o - \frac{sC}{R}V_o = \quad \Rightarrow$$

$$= \left(2sC + \frac{1}{R_1}\right)\left(-\frac{1}{sCRR_2}V_i + \frac{1}{sCRR_2}V_o + -\frac{1-k}{R_2}V_o\right)$$

$$-2s^2C^2V_o + \frac{4sC}{R}V_i - \frac{4sC}{R}V_o - \frac{sC}{R_1}V_o + \frac{2}{RR_1}V_i - \frac{2}{RR_1}V_o + s^2C^2V_i - \frac{sC}{R}V_i +$$

$$\Rightarrow \quad + s^2C^2V_o + \frac{sCk}{R_1}V_o + \frac{sC}{R}V_o = -\frac{2}{RR_2}V_i + \frac{2}{RR_2}V_o - \frac{2sC(1-k)}{R_2}V_o + \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{sCRR_1R_2}V_i + \frac{1}{sCRR_1R_2}V_o - \frac{1-k}{R_1R_2}V_o$$

$$\Rightarrow \quad 2s^2C^2V_o + \frac{3sC}{R}V_o + \frac{sC(1-k)}{R_1}V_o + \frac{2}{RR_1}V_o + \frac{2}{RR_2}V_o + \frac{2sC(1-k)}{R_2}V_o + \frac{1-k}{R_1R_2}V_o + \quad \Rightarrow$$

$$+ \frac{1}{sCRR_1R_2}V_o = s^2C^2V_i + \frac{3sC}{R}V_i + \frac{2}{RR_1}V_i + \frac{2}{RR_2}V_i + \frac{1}{sCRR_1R_2}V_i$$

$$\Rightarrow \quad V_o\left(s^2C^2 + \frac{sC}{R_1} + \frac{2sC}{R_2} + \frac{3sC}{R} + \frac{3}{R_1R_2} + \frac{2}{RR_1} + \frac{1}{sCRR_1R_2}\right) =$$

$$= V_i\left(s^2C^2 + \frac{3sC}{R} + \frac{2}{RR_1} + \frac{2}{RR_2} + \frac{1}{sCRR_1R_2}\right)$$

Si moltiplicano ambo i membri per $\frac{S}{C^2}$:

$$\Rightarrow \quad V_o\left[s^3 + s^2\left(\frac{3}{CR} + \frac{1-k}{CR_1} + \frac{2(1-k)}{CR_2}\right) + s\left(\frac{2}{C^2RR_1} + \frac{2}{C^2RR_2} + \frac{1-k}{C^2R_1R_2}\right) + \frac{1}{C^3RR_1R_2}\right] = \quad \Rightarrow$$

$$= V_i\left[s^3 + s^2\frac{3}{CR} + s\left(\frac{2}{C^2RR_1} + \frac{2}{C^2RR_2}\right) + \frac{1}{C^3RR_1R_2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad G(s)=\frac{V_o}{V_i}=\frac{s^3+s^2\dfrac{3}{CR}+s\left(\dfrac{2}{C^2RR_1}+\dfrac{2}{C^2RR_2}\right)+\dfrac{1}{C^3RR_1R_2}}{s^3+s^2\left(\dfrac{3}{CR}+\dfrac{1-k}{CR_1}+\dfrac{2(1-k)}{CR_2}\right)+s\left(\dfrac{2}{C^2RR_1}+\dfrac{2}{C^2RR_2}+\dfrac{1-k}{C^2R_1R_2}\right)+\dfrac{1}{C^3RR_1R_2}}$$

Tale funzione presenta 3 poli e 3 zeri. Dovendo risultare un filtro elimina banda del 2° ordine, uno zero e un polo reale negativo devono cancellarsi. Nell'ipotesi che un polo e uno zero coincidano, la funzione di trasferimento può essere scritta in forma normalizzata:

$$G(s)=\frac{(s+\omega_1)(s^2+\omega_o^2)}{(s+\omega_1)\left[s^2+\dfrac{\omega_o}{Q_o}s+\omega_o^2\right]}=\frac{s^3+\omega_1 s^2+\omega_o^2 s+\omega_1\omega_o^2}{s^3+\left[\omega_1+\dfrac{\omega_o}{Q_o}\right]s^2+\left[\omega_o^2+\dfrac{\omega_1\omega_o}{Q_o}\right]s+\omega_1\omega_o^2}$$

Il numeratore di questa equazione coincide con quello dell'equazione precedente se risulta

$$\omega_1=\frac{3}{CR} \quad ; \quad \omega_o^2=\frac{2}{C^2RR_1}+\frac{2}{C^2RR_2}$$

$$\omega_1\omega_o^2=\frac{3}{CR}\cdot\left(\frac{2}{C^2RR_1}+\frac{2}{C^2RR_2}\right)=\frac{1}{C^3RR_1R_2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6}{C^3R^2R_1}+\frac{6}{C^3R^2R_2}=\frac{6(R_1+R_2)}{C^3R^2R_1R_2}=\frac{1}{C^3RR_1R_2}$$

Tale uguaglianza è vera se risulta $\quad R=6(R_1+R_2)$.

In tale ipotesi, si ha: $\omega_o^2=\dfrac{2(R_1+R_2)}{C^2RR_1R_2}=\dfrac{2(R_1+R_2)}{C^2\cdot 6(R_1+R_2)R_1R_2}=\dfrac{1}{3C^2R_1R_2} \Rightarrow \omega_o=\dfrac{1}{C\sqrt{3R_1R_2}}$

$$\frac{\omega_o}{Q_o}=\frac{1-k}{CR_1}+\frac{2(1-k)}{CR_2}=\frac{R_2(1-k)+2R_1(1-k)}{CR_1R_2}=\frac{(2R_1+R_2)(1-k)}{CR_1R_2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Q_o=\frac{CR_1R_2}{(2R_1+R_2)(1-k)}\cdot\omega_o=\frac{CR_1R_2}{(2R_1+R_2)(1-k)}\cdot\frac{1}{C\sqrt{3R_1R_2}}=\frac{\sqrt{3R_1R_2}}{3(2R_1+R_2)(1-k)}$$

Da tutto ciò si ottiene la seguente funzione di trasferimento

$$G(s)=\frac{s^2+\dfrac{1}{3C^2R_1R_2}}{s^2+\dfrac{(2R_1+R_2)(1-k)}{CR_1R_2}s+\dfrac{1}{3C^2R_1R_2}}=\frac{s^2+\omega_o^2}{s^2+\dfrac{\omega_o}{Q_o}s+\omega_o^2}.$$